# O processo de demonstrar na aula de Matemática: um olhar sobre a comunicação emergente

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa

## Resumo

Será apresentada parte do estudo desenvolvido no âmbito de uma dissertação de doutoramento que teve como objectivo primordial analisar: (1) o papel da demonstração em vertentes como (a) a compreensão matemática, (b) a validação do conhecimento matemático, e (c) a comunicação matemática; e (2) a relação entre a construção da demonstração e a prática social desenvolvida na aula.

Com base no referido estudo, será discutida a importância crescente que tem sido reconhecida à demonstração quer entre os educadores matemáticos quer nos diversos documentos curriculares a nível nacional e a nível internacional. A relevância da integração curricular da demonstração reside essencialmente no facto de proporcionar uma visão mais compreensiva da natureza da matemática e de promover a aprendizagem da Matemática.

Contudo, os estudos realizados nesta área têm dado evidência empírica de que os alunos revelam grandes dificuldades em compreender a necessidade da demonstração, em compreender as funções da demonstração e em construírem, eles próprios, demonstrações, tendendo a usar exemplos particulares como forma de validar as conjecturas que formulam. Não obstante essas dificuldades, os alunos do ensino básico poderão lidar com a ideia da demonstração e desenvolver a sua capacidade de demonstrar se existir um ensino orientado nesse sentido.

Uma vez que a comunicação é sobretudo um processo didáctico no qual professor e alunos interagem, constituindo um aspecto essencial, e simultaneamente transversal, do ensino e da aprendizagem da Matemática no contexto escolar, será apresentada a parte do estudo que mais directamente se relaciona com a comunicação. Será analisada a forma como se processa a negociação do significado e da necessidade da demonstração na aula de Matemática. Será também analisada a forma como são discutidas as ideias matemáticas envolvidas no processo de demonstração e, através de um enfoque na função explicativa e na função comunicativa da demonstração, será equacionado o papel da comunicação (e da demonstração) no desenvolvimento da compreensão matemática.

A actividade matemática escolar constitui uma actividade social, apresentando especificidades inerentes ao contexto onde se desenvolve. Ao equacionarmos a integração curricular da demonstração, esta poderá tornar-se objecto de estudo e de análise, enquanto vertente integrante da actividade matemática escolar. Neste artigo, a análise dos processos sociais desenvolvidos na aula de Matemática será enquadrada teoricamente numa perspectiva situada, assumindo uma particular importância a teoria social de aprendizagem de Wenger (1998) bem como o constructo *voz* (Wertsch, 1991).

Encarando a demonstração como um processo em que os alunos, ao longo da sua escolaridade, e através da argumentação em torno da justificação e da defesa das suas próprias afirmações (Cobb, Wood e Yackel, 1993; Yackel e Cobb, 1996), vão construindo gradualmente a noção de demonstração, a sua integração curricular no ensino básico é de extrema pertinência, enquanto instrumento ao serviço de uma compreensão mais aprofundada da Matemática. Nesta perspectiva, a demonstração poderá emergir em ambientes de sala de aula caracterizados pela existência de uma comunicação matemática em que os alunos expressam pública e genuinamente o seu pensamento matemático e em que o professor lhes coloca questões com a intenção de entender verdadeiramente o seu raciocínio e de o ampliar, ou de aprofundar ou modificar a sua compreensão matemática (*comunicação instrutiva*, segundo Brendefur e Frykholm, 2000). Uma comunicação matemática em que os alunos não só expõem as suas resoluções aos colegas mas também as explicam e defendem o seu raciocínio, ao serem questionados, quer pelo professor, quer pelos colegas, colocando-o como objecto partilhado de reflexão. Uma comunicação feita em múltiplas direcções e sentidos. No âmbito deste processo, os alunos começam por justificar as suas afirmações apoiando-se em exemplos particulares, evoluindo para justificações cada vez mais gerais. A demonstração, na aula de Matemática, poderá decorrer de uma justificação que encerre um raciocínio dedutivo e o carácter geral do universo matemático, ou de um contra-exemplo que refute a validade de uma dada afirmação.

O estudo (Rodrigues, 2008) apresentado neste artigo teve como objectivo central analisar as formas de persuasão e convencimento desenvolvidas pelos alunos e o papel da demonstração na aprendizagem, no contexto da sua relação com a prática social da aula de Matemática. O campo empírico do estudo incidiu numa turma de 9º ano, da qual foi seleccionado um grupo de quatro alunos. O trabalho desenvolvido por este grupo de alunos nas aulas de Matemática foi videogravado para posterior análise.

## ARGUMENTAÇÃO E DEMONSTRAÇÃO: CONCEITOS DISJUNTOS OU INCLUSIVOS?

A clarificação dos conceitos de argumentação e demonstração e a apresentação de várias formas de os entender advém, em primeiro lugar, da necessidade de estabelecer o que se entende por demonstração em matemática e no contexto escolar. A concepção de demonstração em matemática tem vindo a mudar ao longo dos tempos. No entanto, a estrutura do raciocínio dedutivo, introduzida pela matemática grega, mantém uma certa estabilidade, sendo, essencialmente, a mesma que continua a ser adoptada actualmente (Harel e Sowder, 2007). Apesar dessa relativa estabilidade, poderemos assinalar mudanças históricas e culturais relativamente à visão sobre o papel da demonstração, a sua essência e as suas normas (Hanna e Jahnke, 1993) e, inclusivamente, alguns desacordos relativamente ao tipo de demonstração que se aceita e aos princípios lógicos permissíveis. Actualmente, o advento da utilização dos computadores, em particular, ampliou a controvérsia entre os matemáticos sobre o que se pode considerar, ou não, uma demonstração.

São vários os autores que definem a demonstração de um modo bastante abrangente, considerando-a um argumento que resulta de teoria aceite e que convence os matemáticos peritos, cépticos e qualificados (Benson, 1999; Hanna, 1996; Hersh, 1997). Em *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), demonstração é definida como um argumento consistindo em deduções rigorosas e lógicas a partir de hipóteses. Se pensarmos na construção de demonstrações realizada numa sala de aula de Matemática, os contornos que delimitam a definição apresentada em NCTM (2000) tornam-se muito mais esbatidos, uma vez que a noção de rigor é relativa. No contexto educativo, a demonstração assume um formato distinto do que caracteriza uma demonstração no seio do trabalho desenvolvido pelos matemáticos, não tendo que conter, necessariamente, um conjunto de frases simbólicas formais encadeadas de uma forma lógica e dedutiva, com a explicitação rigorosa dos termos *hipótese, tese e demonstração*. Aliás, é impossível reproduzir no contexto escolar o processo social de verificação desenvolvido no seio da comunidade matemática: é a especialidade detida pelos matemáticos e o seu investimento de tempo que fazem o processo funcionar. Tanto professores como alunos têm consciência de que estão a trabalhar com teoremas que já foram demonstrados pelos matemáticos (Hanna e Jahnke, 1993).

Na aula de Matemática, a demonstração deverá, porém, satisfazer as condições de generalidade e de dedução lógica, feita a partir de resultados conhecidos anteriormente. Simpson (1995, citado em Hanna, 2000) distingue dois tipos de demonstração: a que é feita através da lógica, e que pela sua formalidade é alheia aos alunos e incapaz de estabelecer conexões com as suas estruturas mentais, e a que é feita através do raciocínio, a qual envolve investigações e incorpora argumentos heurísticos, sendo acessível a uma grande percentagem de estudantes. Também Hersh (1993; 1997) concebe a demonstração no contexto escolar de um modo informal ou semi-formal com o recurso à linguagem natural e a eventuais cálculos, negando uma demonstração no sentido da lógica formal.

Definir a demonstração como um argumento convincente leva-nos à discussão sobre as possíveis relações entre argumentação e demonstração. Esta é uma discussão que não tem obtido consensos nem entre os filósofos nem entre os educadores matemáticos, existindo diferentes perspectivas que vão desde uma concepção de disjunção até uma concepção de existência de intersecção ou inclusão.

## A demonstração oposta à argumentação

Para Perelman (1987), um filósofo com obra dedicada à argumentação publicada em 1958, estes dois conceitos são distintos e até opostos. A distinção estabelecida por Chaïm Perelman tem subjacente uma concepção formalista de demonstração. Assim, segundo este autor, a demonstração está associada à lógica formal e “diz respeito à verdade de uma conclusão ou, pelo menos, à sua relação necessária com as premissas” (p. 234) sendo impessoal e isolada de todo o contexto. A sua validade, ao residir no resultado das deduções feitas, não depende da opinião e não visa a adesão de um dado auditório, contrariamente à argumentação que é pessoal e situada, visando, na sua acção persuasiva, a adesão intelectual do auditório, o que implica ter em conta as suas reacções para que o discurso se adapte às mesmas. De acordo com o autor, enquanto a argumentação utiliza uma linguagem natural que pode variar bastante no que respeita ao nível de precisão ou de ambiguidade, a demonstração usa uma linguagem artificial, como é o caso da linguagem simbólica da lógica ou da aritmética, sem qualquer ambiguidade, de tal modo que a verdade ou a falsidade de uma proposição resultem unicamente da sua forma, não existindo lugar para diferentes interpretações. Perelman distingue ainda os dois conceitos pelo facto de considerar a verdade como uma propriedade da proposição, o que não acontece com a adesão do auditório, cuja intensidade constitui uma grandeza variável que pode ser sempre acrescida.

Um outro filósofo que assume uma posição idêntica, e igualmente fundamentada numa concepção formalista de demonstração, é Meyer (1982). Após considerar que todo o discurso é argumentativo, explicita por que é que tal assunção não pode conduzi-lo à inclusão da demonstração na argumentação, acabando por as opor. No âmbito das linguagens formais da demonstração, não é deixada qualquer possibilidade às proposições contraditórias do sistema. “La démonstration mathématique convainc parce que, sur une question donnée, elle donne *la* réponse, et que si on se pose celle-là, on ne peut qu’accepter celle-ci. D’où l’adhésion et l’accord" (Meyer, 1982, p. 136, destaque no original). No que respeita ao raciocínio não formal da argumentação, a questão pode permanecer em aberto, existindo a possibilidade da emergência de contradições. Para Meyer (1982), há argumentação desde que haja uma relação entre um explícito e um implícito. De acordo com Carrilho (1990), esta definição de argumentação é mais abrangente do que a proposta por Perelman, ao colocar a persuasão e a convicção como consequências daquela relação. Argumentar consiste em colocar uma questão. Meyer (1982) formula o que designa por lei geral da linguagem: o uso da linguagem é sempre função do par questão/resposta (unidade fundamental da linguagem). Segundo Carrilho (1990, p. 72), quando Meyer formula esta lei geral e estabelece “o paralelismo questão/resposta, problema/solução, implícito/explícito”, a argumentatividade da linguagem revela-se manifestando uma racionalidade, na ordem da comunicação. A passagem da questão à resposta processa-se por uma inferência flexível que não necessita de ser totalmente explicitada pois é feita através do contexto: as informações partilhadas entre o locutor e o destinatário podem permanecer implícitas. Assim, o papel do contexto "é o de abrir a via de uma pluralidade de respostas possíveis, de uma diversidade de tematizações" (Carrilho, 1990, p. 24). E por conseguinte, a conclusão é uma possibilidade entre outras. Segundo Meyer, tal não acontece com as matemáticas ou com as ciências experimentais que, no seu discurso peremptório, explicitam quer as regras de inferência quer as premissas, já que o matemático ou o cientista não sabe a quem se dirige em particular ou o que pensa ou sabe o seu interlocutor. A demonstração matemática e o discurso científico são peremptórios porque não carecem de resposta; à questão colocada, é facultada uma resposta. Além disso, a conclusão impõe-se necessariamente. Pelo contrário, no raciocínio não formal, a questão pode permanecer em aberto e é perfeitamente possível que surjam desacordos e que se mantenham diferentes alternativas.

No domínio da educação matemática, Balacheff (1991) partilha da perspectiva de Perelman, referindo-o explicitamente e sustentando que enquanto a demonstração visa garantir a verdade de uma afirmação matemática, mostrando a validade lógica do raciocínio, a argumentação visa obter a concordância do interlocutor para a aceitação de uma dada afirmação. Na sua visão, o discurso argumentativo mantém-se sempre em relação com o contra-discurso. O autor apresenta as razões que o levam a distinguir a natureza da argumentação e da demonstração:

> As a social behavior it [the argumentation] is an open process, in other words, it allows the use of any kind of means; whereas, for mathematical proofs, we have to fit the requirement for the use of some knowledge taken from a common body of knowledge on which people (mathematicians) agree. As outcomes of argumentation, problems' solutions are proposed but nothing is ever definitive. (Balacheff, 1991, pp. 188-9)

Duval (1991) é um outro educador matemático que considera existirem diferenças substanciais entre o raciocínio dedutivo e o raciocínio argumentativo, embora admita que usem formas linguísticas e conectivos proposicionais similares. O autor distingue no raciocínio, seja ele dedutivo ou argumentativo, dois tipos de passagem que são de natureza distinta: a *inferência,* correspondente a um passo do raciocínio, e o *encadeamento,* correspondente à transição de um passo do raciocínio ao passo seguinte. E é por recurso a estes dois tipos de passagem que o autor estabelece as principais diferenças entre os dois tipos de raciocínio, argumentando que são diferentes num e noutro.

A inferência consiste na passagem de premissas ou hipóteses a uma outra proposição (conclusão) em virtude de uma regra explícita ou implícita, relevada de uma teoria local (um corpo de axiomas, de definições ou de teoremas) ou da estrutura de uma língua (a negação, as oposições semânticas, …). O raciocínio dedutivo usa inferências que têm uma organização ternária por recorrerem a regras explícitas de teorias locais enquanto o raciocínio argumentativo utiliza inferências que recorrem a regras implícitas da estrutura da língua, nas quais o conteúdo semântico das proposições é primordial, jogando as representações dos interlocutores um papel decisivo. Assim, numa inferência dedutiva, as proposições, ao invés de intervirem em função do seu conteúdo (como acontece na inferência argumentativa), intervêm em função do seu estatuto operatório, isto é, do lugar que ocupam no funcionamento do passo. Existem apenas três estatutos operatórios possíveis para uma proposição numa inferência dedutiva: a proposição de entrada (hipótese ou premissa), a regra de inferência (axiomas, teoremas, definições) e a conclusão (nova proposição obtida). Assim, consoante a situação do quadro teórico que se admita de partida, uma mesma proposição, independentemente do seu conteúdo, pode assumir diferentes estatutos operatórios, podendo ser uma hipótese numa situação, ou a regra de inferência numa outra, ou ainda a conclusão numa situação distinta. Numa dedução, os próprios conectivos proposicionais marcam exclusivamente o estatuto operatório das proposições que eles introduzem, não sendo portanto indispensáveis para marcar as articulações internas de uma inferência dedutiva (por exemplo, a expressão "sabe-se que" marca a proposição de entrada, a expressão "logo" ou "estou certo que" marca a conclusão). A distinção entre conteúdo e estatuto operatório de uma proposição é específica do raciocínio dedutivo. No raciocínio argumentativo, as proposições não têm estatuto operatório. Numa inferência argumentativa, os conectivos proposicionais (se… então, ou, logo, portanto,…) são extremamente importantes ao explicitarem o conteúdo da relação de inclusão ou de exclusão entre as significações de duas proposições.

Relativamente ao encadeamento, Duval (1991) clarifica que um dos seus requisitos, no caso de ser dedutivo, é o de a conclusão do primeiro passo constituir o ponto de partida do passo seguinte. Ou seja, no encadeamento dedutivo, uma mesma proposição tem dois estatutos operatórios diferentes, o de conclusão no primeiro passo e o de proposição de entrada no segundo passo. A *reciclagem* de uma mesma proposição tanto se pode fazer por intermédio da repetição da proposição como por intermédio de uma expressão que lhe faça referência de forma explícita. Assim, a ligação entre os dois passos dedutivos baseia-se na repetição de uma proposição e não numa relação lógica ou semântica entre duas proposições diferentes pertencendo a cada um dos passos ligados, como acontece no encadeamento argumentativo. Daí que o recurso a conectivos como "ou", "logo", ou "se … então" nunca possa ser feito num encadeamento dedutivo. O raciocínio dedutivo comporta dois níveis de organização, correspondentes à inferência (primeiro nível) e ao encadeamento (segundo nível). O raciocínio argumentativo apresenta uma outra organização, em que não se consegue distinguir diferentes níveis: os argumentos justapõem-se seja para se reforçarem mutuamente, seja para se oporem. As proposições não são recicladas mas reinterpretadas por diferentes pontos de vista. Assim, o encadeamento argumentativo baseia-se em relações que devem ser explicitadas através dos conectivos, processando-se, portanto, através de uma *conexão extrínseca*. No raciocínio argumentativo, é possível distinguir dois planos de discurso, em função do confronto entre dois pontos de vista, isto é, em função do carácter dialógico inerente à argumentação.

Partindo dos aspectos distintivos descritos atrás, Duval (1991) tira implicações didácticas relativamente ao ensino da demonstração na aula da Matemática, assumindo implicitamente uma posição defensora da distinção entre demonstração e argumentação, por envolverem raciocínios que, do ponto de vista do seu funcionamento cognitivo, são substancialmente diferentes. Afirma, no entanto, que as características superficiais de ambos os raciocínios — as formas linguísticas e os conectivos proposicionais — são semelhantes, o que pode dificultar, no seu ponto de vista, a aprendizagem da demonstração por parte dos alunos.

## A demonstração incluída na argumentação

Encontramos em Carrilho (1990), no domínio da filosofia, uma visão inclusiva da demonstração na argumentação, encarando-a como estratégia argumentativa particular, embora se refira à demonstração associada à racionalidade científica em geral, designando-a por *prova,* e não propriamente à demonstração matemática:

> Uma ideia se torna aqui possível, a de que a racionalidade comporta diversas matrizes e que esta diferenciação supõe estratégias argumentativas distintas. Se assim for, é preciso caracterizar a articulação *matriz* de racionalidade/*tipo* de argumentação e, ainda, determinar os regimes da operatividade argumentativa: podem então apurar-se quatro matrizes fundamentais da racionalidade, a *científica*, a *hermenêutica*, a *comunicacional* e a *problemático-interrogativa*, bem como as ideias «reguladoras» que, em cada caso, lhes determinam a estratégia argumentativa, isto é, respectivamente, a de *prova,* a de *tradição,* a de *comunidade*, a de *problema*. (Carrilho, 1990, p. 78, destaque no original)

Segundo este autor, a teoria da argumentação interessa-se pela relação entre quem sustenta uma teoria, uma hipótese ou uma tese e quem as recebe, visando os procedimentos discursivos que transformam ou não a relação de afinidade em assentimento. Carrilho (1990) apresenta a sistematização de diferentes pontos de vista sobre a argumentação num registo tríplice: a argumentação como (a) *raciocíni*o, pelo "desenrolar das razões que provocam ou refutam uma tese" (p. 71), conduzindo a uma prova ou a uma conclusão, na ordem do verdadeiro e do necessário, mas também na ordem das opiniões comuns e do provável; (b) *intervenção*, pela apresentação de um modo plausível de factos e valores com uma certa ordem e finalidade; e (c) *interacção,* pela relação intersubjectiva, em que as intervenções de um outro são antecipadas, retomando-as ou refutando-as. Na sistematização atrás apresentada, podemos incluir a demonstração matemática no primeiro registo: uma argumentação como raciocínio, confirmando ou refutando uma tese na ordem do necessário e do verdadeiro. A ordem do provável e das opiniões comuns remete para a argumentação como raciocínio da vida quotidiana conducente à formulação de conclusões. De acordo com Carrilho

(1990, p. 71), esta "sistematização é interessante sobretudo por conduzir ao problema central, que é o do estatuto da linguagem no interior da argumentação e do conhecimento".

A pluralidade com que Carrilho concebe a racionalidade, a que corresponde uma pluralidade de tipos de argumentação, é próxima da ideia de pluralidade de *campos de argumentos* de Toulmin (1969). Para Stephen Toulmin, filósofo que publicou uma obra incidente na argumentação, na mesma altura que Perelman, dois argumentos pertencem ao mesmo campo se os *dados* e as *conclusões* forem do mesmo tipo lógico; caso contrário, pertencerão a diferentes campos. Este autor considera que é possível exigir-se uma argumentação a qualquer que seja a afirmação, tenha ela a natureza que tiver. Todos os argumentos são constituídos essencialmente por três elementos básicos: (a) dados (factos invocados como fundamento da conclusão), (b) *garantia* (frase geral e hipotética que funciona como ponte entre os dados e a conclusão) e (c) *conclusão* (cujos méritos se pretende estabelecer). O autor chama, ainda, a atenção para o facto de a distinção entre dados e garantias não ser absoluta, uma vez que um mesmo enunciado pode corresponder aos dados numa situação, e funcionar como garantias, numa outra. Além destes três elementos essenciais da microestrutura de um argumento, Toulmin ainda considera outros elementos acessórios que tanto podem ser necessários como não. Entre estes, inclui-se o *fundamento* da garantia, que contrariamente ao carácter hipotético desta, assume a forma de frase categórica e factual, justificando porque deve ser aceite a autoridade da garantia. O autor, embora considerando que a argumentação é invariante na sua estrutura, reconhece que a mesma é modelada de diferentes maneiras, consoante o campo, questionando-se sobre quais os aspectos que variam em função do campo e quais os que se mantêm invariantes. Concretamente, no que respeita aos aspectos que são dependentes dos campos, o autor foca os modos de avaliação dos argumentos usados e respectivos critérios, bem como a forma de qualificar as conclusões alcançadas, afirmando que a validade de uma argumentação é interna ao campo a que pertence. O fundamento necessário para estabelecer as garantias também varia de campo para campo. Relativamente ao rigor de uma argumentação, o autor refere que essa questão só pode ser colocada dentro de um mesmo campo: por exemplo, tem sentido comparar o rigor matemático presente em duas demonstrações distintas, mas já não faz qualquer sentido comparar o rigor matemático de um eminente matemático com o rigor jurídico de um alto magistrado judicial. Por conseguinte, uma argumentação tem sempre de ser situada no seu campo particular. São os saberes e as normas de cada um dos campos específicos de argumentos que fundamentam as justificações sustentadoras do discurso argumentativo e que permitem avaliar os raciocínios desenvolvidos.

Para Toulmin, a demonstração matemática é um argumento particular que se inscreve num campo específico, diferente de outros campos com outros tipos de argumentos. No estudo que aqui apresento, assumo também essa posição. Considero que a distinção estrita entre demonstração e argumentação que

Perelman e Meyer estabelecem fundamenta-se na concepção formalista que têm de demonstração. Se atendermos à demonstração tal como ela é produzida na prática efectiva dos matemáticos, verificamos que a demonstração não tem completamente um carácter lógico-formal, incorporando a linguagem natural e assumindo características informais (Hersh, 1993; 1997). Determinados passos podem ser omissos por serem de entendimento implícito entre o seu autor e o auditório a que se destina. Daí que encontremos na demonstração matemática um jogo entre o que se explicita e o que se torna implícito. Thurston (1995), ao focar a sua própria experiência de produzir e provar teoremas, chama a atenção para a importância do auditório na construção das demonstrações e, em particular, na comunicação das mesmas. Assim, dependendo do auditório específico, necessitará de explicitar mais ou menos certas partes das demonstrações, para que estas sejam compreendidas pelos outros matemáticos. Em termos absolutos, nem é completamente impessoal, já que na aceitação de uma dada demonstração, intervêm factores pessoais como o reconhecimento da integridade e da competência do autor da mesma (Hanna e Jahnke, 1996; Hersh, 1997; Thurston, 1995), levando os matemáticos a sentirem-se dispensados de examinar detalhadamente a demonstração linha a linha. No entanto, mesmo numa acepção prática de demonstração, mantém-se bastante pertinente a distinção entre verdade e adesão, feita por Perelman: a comunidade de matemáticos ou aceita ou não aceita uma demonstração, validando a verdade da conclusão alcançada pela demonstração. Aqui a verdade tem um carácter dual, e não gradual, como acontece com a adesão. Mesmo que essa aceitação não seja consensual em toda a comunidade, ela não se baseia numa maior ou menor adesão.

A demonstração apresenta, pois, uma especificação própria, visando uma validação por meio de uma justificação no interior de um domínio teórico, podendo portanto distinguir-se de uma argumentação comum espontânea, quer pelo modo de funcionamento dos respectivos raciocínios (Duval, 1991), quer pelo facto de a construção dos argumentos demonstrativos requerer o conhecimento de regras e convenções estabelecidas pela comunidade matemática (Balacheff, 1991). Ou seja, é necessário atender ao campo de argumentos específico da demonstração matemática, tal como proposto por Toulmin (1969).

## INTEGRAÇÃO CURRICULAR DA DEMONSTRAÇÃO: RELEVÂNCIA E DESAFIOS

Segundo Hanna (1996), demonstração é um argumento transparente usado para validar uma afirmação, e que tem uma dupla função, a de promover a compreensão e a de convencer. A relevância da sua integração curricular está associada, por um lado, a um dos principais objectivos do ensino da Matemática: permitir que os alunos compreendam a natureza da matemática, ciência cujas teorias são comprovadas, não pela experimentação, mas sim pela demonstração, não obstante a presença da experimentação e da intuição na actividade matemática, em particular, na fase inicial de descoberta (Hanna, 1996; 2000). De Villiers (2004) advoga que se deve consciencializar todos os alunos, em todos os níveis de ensino, desta diferença fundamental entre a matemática e as outras ciências: enquanto a ciência é baseada, em geral, nas suas asserções empíricas, as regularidades encontradas em matemática não constituem uma prova. O autor afirma mesmo que "nobody, today, can really be considered mathematically educated or literate, if he or she is not aware of the insufficiency of quasi-empirical evidence to guarantee truth in mathematics, no matter how convincing that evidence may seem" (de Villiers, 2004, p. 412). Por outro lado, a justificação desta integração reside sobretudo no papel que a demonstração pode desempenhar ao nível da promoção da compreensão matemática (Hanna, 2000; Hersh, 1993; 1997; NCTM, 2000). É esta a sua função primordial no contexto escolar: uma função explicativa que provoque um salto qualitativo nas aprendizagens dos alunos. Mais importante que validar ou conhecer certos factos matemáticos é compreender por que motivo ocorrem. Daí ser fundamental uma integração transversal a todo o currículo, de forma a não ser tratada de forma independente dos vários conceitos matemáticos. Este tipo de compreensão, facultada por uma demonstração explicativa, coloca o pensamento matemático dos alunos num nível superior conceptual.

A importância que a comunidade da educação matemática tem reconhecido à demonstração na matemática escolar, tem tido, ultimamente, como reflexo, uma valorização da mesma nos currículos prescritos a nível internacional e nacional. Contudo, continua a existir uma grande distância entre a prescrição curricular e o currículo em acção, no que toca a este aspecto em particular. Os estudos desenvolvidos com professores neste domínio, à escala internacional, indicam que a maioria dos professores não reserva tempo das suas aulas ao ensino da demonstração (Harel e Sowder, 2007). Evidenciam ainda que a maioria dos docentes não encara a demonstração como sendo central na educação matemática, considerando-a adequada apenas a uma minoria de alunos.

Os estudos empíricos incidentes nesta temática evidenciam também francas dificuldades dos alunos, desde o nível mais básico até ao nível superior, quer na compreensão da importância ou da necessidade da demonstração, quer na sua construção (Brocardo, 2001; Chazan, 1993; Harel e Sowder, 2007; Recio e Godino, 2001; Rodrigues, 1997; 2000; 2008). De acordo com Healy e Hoyles (2000), o processo de demonstração revela-se complexo para os alunos já que envolve uma série de competências que, por si só, não são nada simples: (a) identificar assunções, (b) isolar as propriedades e estruturas dadas e (c) organizar os argumentos lógicos. Daí que seja uma questão premente para a educação matemática a de clarificar o que deve ser feito no sentido de desenvolver nos alunos essas mesmas competências demonstrativas.

Segundo de Villiers (2001), o problema dos alunos com a demonstração reside mais na falta de motivação e de compreensão da respectiva função do que na falta de competência no raciocínio lógico, apontando estudos reveladores de que crianças muito novas são capazes de raciocinar logicamente num contexto de situações reais significativas para elas. Os estudos focados em exemplos de experiências curriculares, concebidas com o objectivo de desenvolver nos alunos a capacidade de demonstrar, em que os professores intervenientes valorizam o ensino da demonstração, mostram que currículos de Matemática apropriados, em conjunção com uma intervenção adequada do professor, podem ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio dedutivo e a lidar, desde muito cedo, com as ideias da demonstração (Harel e Sowder, 2007).

A natureza do discurso é um elemento-chave na compreensão do que deve ser um contexto favorável ao desenvolvimento da competência em demonstrar na aula de Matemática. Um ambiente de aprendizagem em que seja comum os alunos explicitarem as suas formas de pensar, e argumentarem e contra-argumentarem em torno dos seus raciocínios, ao invés de ser o professor a ajuizar sobre a correcção de uma dada afirmação, é um factor que contribui para o desenvolvimento, nos alunos, da sua capacidade de demonstrar (Harel e Sowder, 2007).

De acordo com Balacheff (1991), para a motivação dos alunos para a demonstração, é fundamental que o professor devolva aos alunos a responsabilidade da validação das afirmações matemáticas. A discussão desenvolvida entre os estudantes no seio do pequeno grupo e também com o professor em grupo-turma tem, igualmente, uma importância decisiva na emergência do significado da demonstração e na motivação para demonstrar as conjecturas formuladas (Alibert e Thomas, 1991; Boavida, 2005; Fonseca, 2004; Mariotti, 2000). No entanto, Balacheff (1991) refere que nem sempre tais situações de interacção garantem, por si só, que os alunos se envolverão em discussões matemáticas e que, por fim, produzirão uma demonstração. Os resultados do seu estudo evidenciaram que as interacções sociais, desenvolvidas no seio do pequeno grupo, podem favorecer a emergência de processos de demonstração nos alunos mas podem também ser um obstáculo à produção de demonstrações. Constituem um obstáculo quando os alunos não conseguem coordenar diferentes pontos de vista e ultrapassar o seu conflito numa base científica, acabando por optar por formas empíricas de validação para conseguirem obter o acordo dos colegas, já que deverão encontrar, num dado problema, uma solução comum a todo o grupo.

A compreensão do que é uma demonstração e o desenvolvimento nos alunos de uma visão valorativa da mesma, que os leve a sentirem necessidade de a produzir, encarando-a como argumento geral, relacionam-se, de acordo com Hanna e Jahnke (1993), com uma visão de uma base pragmática para a demonstração. No contexto escolar, a perspectiva dedutiva e a perspectiva de aplicação deverão manter-se intimamente ligados. A significância de um teorema decorre da sua aplicação. Daí que os professores devam considerar a contribuição de uma dada demonstração na compreensão da realidade, não podendo, pois, ignorar o aspecto da aplicação, como acontece com os matemáticos. A relação entre a matemática e a realidade tem um papel fundamental no ensino e na aprendizagem. O ensino da demonstração com a consideração desta relação implica um elevado nível de complexidade epistemológica nos processos de ensino e de aprendizagem. Na perspectiva dos autores, o ensino tem de ser multi-dimensional e processar-se a diferentes níveis, o que no caso particular da demonstração, é difícil de conseguir, sendo um campo em que há ainda muito a fazer. Focando o papel da comunicação, os autores defendem que a comunicação na matemática escolar visa a complexidade matemática enquanto na escola, a comunicação lida com a complexidade epistemológica. Como os estudantes não possuem o conhecimento contextual que lhes permita justificar um teorema em termos da sua aplicação, é na situação de aprendizagem que estes dois aspectos não se podem separar: o argumento dedutivo tem de se relacionar com a sua área de aplicação intra ou extra-matemática. Segundo Hanna e Jahnke (1993), os alunos não estão seguros acerca dessa relação e é por esse motivo que estabelecem conclusões gerais com base em medições ou que duvidam da validade geral de uma demonstração matemática, recorrendo, a testes empíricos mesmo que estejam na presença da mesma. Os autores defendem, ainda, que é necessário que os alunos tenham uma experiência vasta e coerente na área de aplicação de um dado teorema para que compreendam o seu significado. Tal pode e deve ser feito separadamente da derivação formal. E só então os estudantes serão capazes de valorizar uma demonstração.

## METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

A metodologia do estudo teve uma natureza interpretativa, dada a respectiva adequação com a problemática investigada e com as questões orientadoras do estudo: (a) qual a natureza da demonstração no contexto escolar?, (b) qual o papel da demonstração na actividade matemática escolar?, e (c) de que forma a concretização da demonstração se relaciona com a prática social desenvolvida na aula de Matemática?

A análise do estudo incidiu nos processos de ocorrência dos acontecimentos e nos significados dos participantes envolvidos. A investigação enquadra-se, por conseguinte, numa abordagem de natureza qualitativa, com a recolha de dados de índole qualitativa, ricos em pormenores descritivos. Foram observados os comportamentos dos alunos, o modo como desenvolvem a sua actividade matemática, e as suas interacções, em contexto de sala de aula, sendo este ambiente natural a fonte directa dos dados, dada a necessidade de analisar as situações contextualmente.

Os dados analisados foram recolhidos numa escola do ensino básico, numa turma de 9º ano, durante o ano lectivo de 2005/06, nas aulas de Matemática em que foram exploradas as tarefas acordadas com a professora, num total de 30 aulas, correspondendo a 15 blocos de 90 minutos. Foi seleccionado, na turma, um grupo de quatro alunos para constituir o alvo da pesquisa e foi o trabalho desenvolvido pelo mesmo que foi videogravado. Foram utilizadas as seguintes técnicas de recolha de dados: entrevistas semiestruturadas videogravadas (à professora e a cada um dos alunos do grupo-alvo), observação participante e naturalista, e análise de documentos. Os documentos utilizados como fontes de informação incluem: (a) os registos vídeo e (b) os trabalhos de todos os alunos da turma escritos.

Na investigação de tipo qualitativo, a análise dos dados é feita, fundamentalmente, de forma indutiva, existindo o propósito de percorrer um processo de exploração e descoberta de aspectos emergentes da própria análise de dados. Contudo, quer a dedução quer a indução estiveram presentes na análise qualitativa de dados (Brown e Dowling, 1998; Erickson, 1986; Merriam, 1991), uma vez que a dedução decorrente dos conceitos teóricos, enquanto instrumentos analíticos dos episódios empíricos, relacionou-se dialecticamente com a indução da análise de dados.

## Enquadramento teórico

Alguns dos constructos teóricos mobilizados no presente artigo são *recurso estruturante*, *voz* e *identidade*. Lave (1997) define recurso estruturante como algo — conceitos, objectos, pessoas, actividade — que suporta uma dada situação, dando-lhe forma estrutural. Voz é um constructo bakhtiniano, representando uma personalidade (consciência) falante, que Wertsch (1991) utiliza, no âmbito de uma perspectiva vygotskyana, sustentada pela ideia de que o modo de funcionamento da mente humana individual tem origem nos processos sociais comunicativos. O *ventriloquismo* constitui o processo de uma voz falar através de outra voz. Existe neste processo uma certa interferência de uma voz noutra voz, acompanhada por uma subordinação parcial e correlativa. Qualquer palavra, antes de ser apropriada pelo indivíduo, ao lhe conferir a sua própria intenção, é retirada das outras pessoas e dos seus contextos concretos. A elocução está inerentemente associada a pelo menos duas vozes, pois encerra, em si mesma, o conceito de endereçamento. A comunicação é vista como uma longa cadeia de elocuções interdependentes, reflectindo-se mutuamente.

A teoria da actividade de Leont'ev (1978) constitui igualmente um instrumento analítico, sendo usado o constructo *motivo*. Para este psicólogo soviético, a actividade humana individual constitui um sistema dentro do sistema de relações sociais. A actividade, unidade de análise central na sua teoria, é formada por acções, e estas são compostas por operações que dão significado às acções realizadas sob constrangimentos específicos. As acções estão subordinadas a objectivos que representam passos intermédios na satisfação dos motivos humanos gerais. A actividade é, pois, um sistema de coordenações, limitada pelos motivos, sendo possível distinguir-se três níveis na sua estrutura. O nível mais elevado corresponde ao motivo, o intermédio é a acção direccionada por objectivos e o nível inferior corresponde às operações. Leont'ev (1978) distingue os motivos sociais, de formação de sentido, dos individuais, de estimulação. Nas relações hierárquicas entre os motivos, são os sociais, de formação de sentido, que ocupam o nível mais elevado.

A prática social da aula de Matemática foi analisada pela perspectiva da teoria social de aprendizagem de Wenger (1998). O foco principal desta teoria é a aprendizagem como participação social, entendida como o processo de ser participante activo nas práticas das comunidades sociais e de construir identidades em relação a estas comunidades. Por exemplo, participar num trabalho de grupo é simultaneamente uma forma de acção e uma forma de pertença. A aprendizagem não é apenas uma acumulação de capacidades e de informação, é uma experiência de identidade, já que a aprendizagem transforma o que somos e o que conseguimos fazer. A construção de uma identidade consiste na negociação dos significados da experiência de pertença a comunidades. Ou seja, tanto a participação como a não-participação são fontes da identidade. A não-participação pode ser ela própria um aspecto da prática. O autor salienta o facto de que o que transforma a informação em conhecimento, tornando-a poderosa, é o modo como a mesma pode ser integrada numa identidade de participação. Caso contrário, a informação permanece fragmentada, inegociável e alienada. Wenger salienta a dualidade do processo de formação da identidade já que o mesmo se constitui pela tensão entre a *identificação* e a *negociabilidade*. A identificação é um processo contínuo de construção de uma identidade num contexto social, através do qual os modos de pertença se tornam constitutivos da identidade. A negociabilidade refere-se à habilidade, facilidade e legitimidade em contribuir para dar forma aos significados relevantes numa dada configuração social, permitindo aplicar os significados em novas circunstâncias. Segundo o autor, a tensão entre identificação e negociabilidade é intrínseca a uma concepção social da identidade. E falar desta tensão é falar acerca do poder e do modo de pertença. O poder resulta quer da pertença quer do exercício do controlo sobre aquilo a que se pertence. A sua estrutura dual — ser membro de, e *posse de significado* — reflecte a interacção entre a identificação e a negociabilidade. É a identificação que fornece o material constitutivo da identidade e é a negociabilidade que permite usar esse mesmo material para afirmar a identidade como produtora de significado. A posse de significado refere-se ao grau com que uma pessoa usa, modifica, ou afirma como seus os significados que negoceia. No entanto, não se trata de um conceito com um pendor individualista. Pelo contrário, pelo facto de a posse de significado ser partilhada, verifica-se um crescimento da mesma em todos os participantes.

## APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DE ALGUNS RESULTADOS

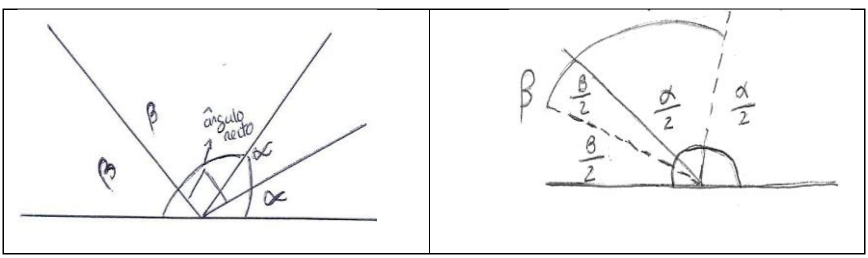
Nesta secção, irei apresentar alguns dados relacionados com a exploração de uma única tarefa e discuti-los de forma a focalizar a atenção nos aspectos comunicativos. A tarefa visava a descoberta da relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares adjacentes e após a colocação desta questão, uma pequena nota, incluída no enunciado da tarefa, sugeria que os alunos fizessem esquemas dos ângulos e respectivas bissectrizes.

## A negociação da necessidade e do significado da demonstração

A professora introduziu a tarefa referindo que a mesma tinha dois objectivos: o de trabalhar e recordar conceitos já aprendidos anteriormente e o de ir desenvolvendo, a pouco e pouco, a competência de demonstrar. Alertou os alunos para o facto de no exame de 9º ano do ano lectivo transacto ter sido pedida explicitamente uma demonstração, na qual dever-se-ia utilizar letras e não exemplos particulares.

Todos os grupos de alunos conseguiram concretizar esta tarefa com sucesso, tendo seguido processos similares. Primeiro, fizeram o esquema que, para a maioria dos grupos, não foi revelador da relação entre as bissectrizes, uma vez que o ângulo recto formado pelas mesmas se encontrava, em todos os esquemas desenhados pelos alunos, numa posição oblíqua, pouco habitual, relativamente à forma como os alunos usualmente vêem ou representam um ângulo recto. Daí que, nesta tarefa, a maior parte dos alunos da turma não chegasse a conjecturar, partindo para a manipulação algébrica sem a mínima suspeita sobre o respectivo resultado. As bissectrizes foram traçadas sensivelmente a meio de cada um dos ângulos, sem qualquer preocupação de medição (Fig. 1).

Fig. 1. Esquemas elaborados por dois grupos de alunos.




Passo a apresentar a resolução algébrica da tarefa feita pelo grupo-alvo (cujo esquema é o da esquerda da Fig. 1) que foi semelhante à dos restantes grupos:

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \dfrac{2\alpha}{2} + \dfrac{2\beta}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

> R: A relação entre as bissectrizes de ângulos suplementares é que formam sempre um ângulo de 90º. (Rodrigues, 2008, p. 678)

Trata-se de uma resolução que constituiu simultaneamente a demonstração da relação questionada. A maior parte dos grupos apenas alcançou a solução por meio da manipulação algébrica. Apesar de os alunos terem feito primeiro o esquema, só um grupo ficou com a percepção da perpendicularidade das bissectrizes, pela respectiva observação, tendo alcançado a certeza dessa relação pela demonstração efectuada. O esquema ajudou a generalidade dos alunos a traduzir a situação algebricamente, a que não foi alheia a própria notação dos ângulos escolhida pelos mesmos. No grupo-alvo, foi um dos seus elementos que, por *insight,* descobriu a relação, previamente ao traçado do esquema ou a qualquer outro registo escrito.

A professora negociou com os alunos a generalidade associada à demonstração quando, na introdução da tarefa, os incutiu para um trabalho de validação sem recurso ao uso de exemplos particulares. A generalidade esteve igualmente presente na sugestão do esquema já que este pressupõe a ausência de rigor no traçado dos objectos geométricos em causa e, portanto, qualquer amplitude assinalada teria forçosamente que decorrer de uma propriedade teórica e não de uma medição que, pelo seu cariz, é sempre particular e transporta consigo, por inerência, um certo erro. Ou seja, os objectos geométricos, instanciados no esquema, foram sempre assumidos na sua generalidade. Também na conclusão da tarefa, após as apresentações feitas pelos alunos, a professora reforçou essa mesma generalidade ao enfatizar que tal relação se verifica *sempre* para todos e quaisquer ângulos suplementares (adjacentes) que se queira considerar, exprimindo oralmente o que os vários grupos tinham redigido como conclusão da demonstração algébrica.

Neste caso, em que a conjecturação esteve, praticamente, ausente do trabalho dos alunos, por terem tomado como ponto de partida objectos gerais, e não casos particulares, a demonstração surgiu como que naturalmente na actividade matemática dos alunos, sem que a professora incidisse o seu discurso na negociação da sua necessidade, uma vez que a demonstração aglutinou, em si, o processo de descoberta e de resolução conducente a uma solução, bem como o processo de verificação e de justificação. Trata-se de uma demonstração que, numa fase única de trabalho, coincidente com a própria exploração da tarefa, assumiu simultaneamente múltiplas funções: de descoberta, verificação, explicação, e comunicação. Ao mesmo tempo que descobrem a solução do problema, os alunos ficam convictos que a mesma é verdadeira. Contudo, o que os motivou sobretudo para a construção de uma demonstração foi a pretensão de descobrir uma dada relação entre entes geométricos.

O diagrama foi um recurso estruturante (Lave, 1997), suportando e dando forma estrutural à actividade matemática desenvolvida pelos alunos que se caracterizou pela sua base dedutiva e pelas relações teóricas entre os objectos matemáticos. Efectivamente, o esquema, ao ser elaborado com pouco rigor, representou, desde o início, os ângulos na sua generalidade, e não casos particulares medidos rigorosamente. Por conseguinte, as justificações encontradas baseiam-se em propriedades e não em medições empíricas ou informações perceptivas.

A própria notação usada foi crucial pois a identificação dos ângulos com letras do alfabeto grego facilitou a emergência de algumas das relações importantes (como o caso da relação de igualdade entre ângulos, ao fazer-se o registo de duas letras iguais), e os alunos desligaram-se, desde logo, das amplitudes concretas que os ângulos pudessem ter. Além disso, a notação por recurso a letras únicas facilitou o registo decorrente da observação do esquema, tornando-o mais simples e mais claro, permitindo, assim, que os alunos se concentrassem no essencial (os dois semi-ângulos que juntos formam o ângulo cujos lados são as bissectrizes), e ignorassem o acessório (os ângulos situados no exterior das duas bissectrizes) Os alunos optaram, pois, por tratar implicitamente as situações geométricas como se elas fossem algébricas, assumindo os ângulos como quantidades (Herbst, 2002). A demonstração, nesta tarefa, requer uma linguagem quantitativa para relacionar os objectos geométricos, e portanto pressupõe um tratamento algébrico desses objectos.

## A estrutura do argumento

À luz do modelo de Toulmin (1969), vemos que a demonstração algébrica explicita os seus elementos constitutivos, embora de um modo condensado, dada a economia de linguagem que a caracteriza, não sendo alheia a notação algébrica usada. A estrutura de um argumento simples pode ser esquematizada do seguinte modo:

Fig. 2. Estrutura de um argumento simples segundo o modelo de Toulmin (1969)

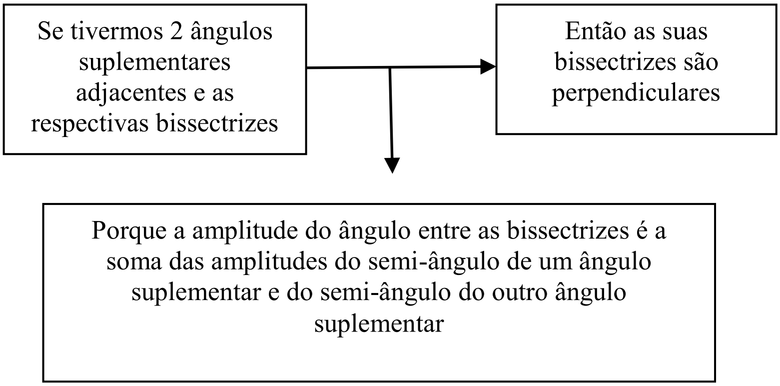
Dados → Então Conclusão

↓

Porque Garantia

Analisemos a estrutura do argumento explicitado na demonstração algébrica efectuada pelos alunos, através deste modelo:

Fig. 3. Estrutura do argumento alusivo às bissectrizes segundo o modelo de Toulmin (1969)




Assim, a primeira proposição algébrica escrita pelos alunos — "$2\alpha + 2\beta = 180^{o}$" — condensa a explicitação dos dois dados de que partiram: a amplitude dos dois ângulos suplementares e as respectivas bissectrizes ($2\alpha$ e $2\beta$ explicitam o facto de as bissectrizes dividirem os ângulos em dois ângulos congruentes). A segunda proposição — "$\frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \frac{180^{o}}{2}$" — condensa a explicitação da garantia e prepara já a explicitação da própria conclusão. De facto, é a garantia que torna possível a inferência que conduz à conclusão de que o ângulo entre as bissectrizes medirá sempre 90º, expressa quer em termos algébricos — "$\alpha+\beta=90^{o}$" — quer, também, depois, em termos narrativos.

## A demonstração narrativa e a comunicação

Nesta tarefa, enquanto os restantes grupos descobriram a relação por meio de uma demonstração algébrica, o Ricardo do grupo-alvo fez essa descoberta, de modo súbito, por intermédio de uma demonstração narrativa. Todos os elementos do grupo começaram a tarefa pelo completamento das frases colocadas na parte superior da folha, em que deveriam indicar o que são ângulos suplementares, o que é uma bissectriz, e dar, ainda, exemplos de notações possíveis para ângulos. Enquanto os colegas de grupo dialogavam em torno do que colocar na última frase, o Ricardo alheou-se, por completo, desse mesmo diálogo e olhava atento para a questão colocada na tarefa. Manteve-se assim totalmente absorto durante dezasseis segundos, parado, sem nada registar, até que, interrompendo os colegas que ainda enunciavam letras do alfabeto grego, exclamou subitamente: "Yaa!! Já sei! Bissectrizes de ângulos suplementares porque somados eles dão um ângulo de noventa graus". Dito isto, fez um gesto de entusiasmo e emitiu um som semelhante a um estampido. Os colegas não reagiram. Vejamos o extracto da transcrição alusivo ao momento seguinte:

> R- Então, eu vou explicar. Vou explicar.
> *O Ricardo começa a fazer um esquema no seu caderno. A Sara escreve na sua ficha e não presta atenção ao Ricardo. O Bernardo e a Maria olham para o caderno do Ricardo.*
> R- (*olhando para o Bernardo, e apontando para o esquema que vai construindo enquanto fala*) Isto é dois ângulos suplementares. Dá cento e oitenta.
> M- Pera [sic] aí que falta a Sara.
> S- (*a Sara começa a olhar e a prestar atenção*) Diz.
> R- Isto são dois ângulos suplementares, dá cento e oitenta. Quando dividimos, é isto e isto (*traça as bissectrizes enquanto fala*).
> S- (*acenando afirmativamente com a cabeça*) É a bissectriz.
> R- Tem calma!... (*a Sara sorri*) Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus.
> *Faz-se uma breve pausa.*
> S- Não tou [sic] a perceber. É o quê? É um matemático que temos aqui! A sério, não percebi.
> R- Sei que não percebeste… Também eu. Nem eu percebi.
> S- (*sorrindo*) Ah! Tu não percebeste?! Boa!
> R- Eu tenho a certeza que tá [sic] bem. Mas agora não percebi… (Rodrigues, 2008, p. 682)

Na compreensão da relação entre as bissectrizes, o Ricardo não necessitou de esboçar no papel qualquer esquema. Possivelmente, visualizou-o no curto espaço de tempo em que se fez luz no seu pensamento focado numa dedução lógica, a partir dos únicos dados que possuía: ângulos suplementares e bissectrizes. O raciocínio claramente dedutivo do Ricardo encontra-se evidenciado até no modo como ele usa o termo conclusivo "logo": "Podemos somar estes dois, fica metade de cento e oitenta por fora. Logo, é um ângulo recto. Logo, é noventa graus.". A expressão " metade de cento e oitenta por fora" pretende explicitar que a amplitude procurada é a do ângulo convexo entre as bissectrizes, colocando-a em confronto com a amplitude total dos dois ângulos suplementares — "cento e oitenta por fora" — de forma a estabelecer uma relação entre ambas. O esquema esboçado pelo Ricardo no seu caderno é, de novo, um recurso estruturante, mas desta vez, ao serviço da comunicação com os colegas, decorrendo de um motivo social (Leont'ev, 1978) de explicar, isto é, de tornar o seu pensamento inteligível para os outros, mas sem qualquer ligação com a sugestão, feita no enunciado da tarefa, de elaboração de um esquema.

A comunicação presente no momento, atrás transcrito, vive da convergência da atenção de todos os elementos do grupo. A intervenção da Maria — "Pera [sic] aí que falta a Sara" — é reveladora da prática do grupo de todos os seus elementos serem ouvintes atentos das falas uns dos outros. De facto, a Sara encontrava-se sentada, junto do restante grupo; a referência a "falta a Sara" não se reportava a uma ausência física, mas sim a uma ausência cognitiva. A Maria instou, portanto, o colega a que esperasse um pouco até que a Sara lhe prestasse atenção. Contudo, apesar da convergência da atenção de todos, e dos esforços do Ricardo, as dificuldades de comunicação com os colegas, no sentido de se proceder a uma partilha de significados matemáticos, mantiveram-se, e a Sara, único elemento do grupo a interagir verbalmente à explicação do Ricardo, manifestou a sua incompreensão. Quando o Ricardo diz que nem ele percebeu, tal deve-se à sua dificuldade em comunicar o que pensou, no sentido de o tornar compreensível aos colegas, e não à sua falta de compreensão, conforme ele expressa. Aliás, é essa compreensão que lhe confere a certeza de que está a pensar bem, não duvidando nunca, em toda a aula, dessa mesma certeza. Mas é uma compreensão que ocorreu de forma muito súbita, e o seu pensamento, apesar de evidenciar traços de clareza lógica e dedutiva, é encarado pelo Ricardo como se estivesse em turbilhão, numa fase sincrética, e que necessitasse ainda de ser escalpelizado para que todos entendessem claramente o que ele viu e tem a certeza que está bem. Estamos, pois, na presença da função comunicativa da demonstração. Vejamos como prosseguiu o Ricardo na sua tentativa de explicação:

> O Ricardo apaga o esquema acabado de construir no seu caderno. (…)
> S- (falando para a Maria enquanto esboça um esquema mas com o lápis no ar) Usa os conhecimentos para descobrir isto… Ou seja… Aqui, algumas coisas, estas coisas têm de se aproveitar aqui…
> M- Ângulos suplementares…
> R- (dando seguimento à frase iniciada pela Maria) Cento e oitenta graus. Metade…
> M- A bissectriz…
> R- Dá noventa graus. A bissectriz, dá noventa graus. Usa a metade de um ângulo e a metade de outro. Logo, dá noventa graus.
> A Sara olha para o Ricardo com uma expressão muito atenta.
> R- (falando para a Sara) Não percebeste?
> S- Percebi.
> O Ricardo volta a fazer um esquema no seu caderno.
> R- (olhando para a Sara e depois apontando para o esquema enquanto regista valores numéricos) Por exemplo, por exemplo, vou usar números assim marados, sei lá… Vá… Aqui é sessenta, aqui é cento e vinte. A bissectriz (traça a bissectriz) a fazer isto, dá aqui trinta e aqui sessenta (traça a outra bissectriz). Trinta mais sessenta, noventa. Ângulo recto. Percebeste?
> S- (aponta para o caderno do Ricardo) Silva, (imperceptível) que isto tá [sic] uma grande confusão. Não tou [sic] a perceber nada.
> O Ricardo apaga o esquema com os exemplos acabados de registar no seu caderno.
> R- (olhando para o Bernardo em frente) É metade! Assim, dá um ângulo recto. (Rodrigues, 2008, pp. 682-3)

Esta segunda tentativa parece ter sido mais bem sucedida pois, logo após, a Sara admitiu ter percebido. Mesmo assim, o Ricardo sentiu necessidade de reforçar a sua explicação com o recurso à particularização e à elaboração de um novo esquema, como se não tivesse ficado muito convencido que a Sara efectivamente tivesse compreendido bem. Os exemplos particulares usados não serviram para estudar uma questão geral mas unicamente para ilustrar e, eventualmente, tornar mais compreensível, uma dada propriedade geral.

Foram, portanto, um recurso de comunicação. Após a ilustração com exemplos de amplitudes, a Sara não respondeu directamente à questão do Ricardo sobre se tinha percebido, como se já não precisasse de reafirmar o que já tinha dito antes. A sua intervenção incidiu no esquema elaborado pelo Ricardo e a referência a não estar a perceber nada tem a ver com o esquema que ela considera pouco claro e perceptível, e não propriamente com a compreensão da relação entre as bissectrizes.

Vejamos o que se passou após o momento transcrito acima. Depois de o Ricardo ter apagado o esquema no seu caderno, todos os elementos do grupo ficaram, nuns breves instantes, num certo impasse, sem nada fazer. A professora aproximou-se do grupo pela primeira vez e, de imediato, o Ricardo interpelou-a:

> R- Stora, dá um ângulo de noventa graus. A relação é que faz um ângulo de noventa graus. Agora, não consigo explicar aos outros. Os outros…
> P- Então, mas vamos fazer um esquema. Eu faço aqui uma nota, sugiro, não é? Sugiro… fazer um esquema… façam um ângulo…
> B- (*apontando para o caderno do Ricardo*) Ele já fez aqui, stora. Mas foi uma grande confusão.
> R- Sim, só que eu fiz sem régua… (Rodrigues, 2008, pp. 684)

O Ricardo comunicou a sua descoberta à professora sem explicitar o raciocínio que o conduziu à mesma e sem qualquer pretensão de obter algum tipo de validação, dada a certeza que depositava na sua conclusão, obtida por via demonstrativa. Uma vez que a sua preocupação residia na dificuldade de comunicação com os colegas, partilhou com a professora a sua dificuldade em explicar aos colegas a razão que fundamentava essa mesma descoberta. A professora pareceu ignorar a descoberta do Ricardo, demitindo-se de formular uma validação que pudesse limitar o trabalho a desenvolver pelos vários elementos do grupo. Tentou, simplesmente, dar resposta à dificuldade expressa pelo Ricardo em fazer com que todos os elementos do grupo compreendessem a relação em causa, sugerindo a elaboração do esquema de modo a que todos os alunos do grupo pudessem apropriar-se das relações focadas na tarefa. Foi uma intervenção didáctica que remeteu o trabalho ao grupo, exactamente para um ponto de partida inicial, como se nenhum dos seus elementos tivesse alcançado qualquer conclusão, visando assim que todos se envolvessem no trabalho matemático.

O modo como o grupo-alvo desenvolveu a seguir o seu trabalho conduziu-o à concretização da demonstração algébrica, negociada com a professora. O registo escrito do grupo não apresenta qualquer marca da demonstração narrativa e informal nos termos em que o Ricardo a comunicou oralmente aos colegas.

A explicitação narrativa pôs a descoberto a explicação da razão por que se verifica a propriedade de as bissectrizes de ângulos suplementares adjacentes serem perpendiculares. Assim, a função explicativa da demonstração está muito mais presente na sua forma narrativa do que no formato algébrico.

Eventualmente, os alunos, numa resolução algébrica, poderão chegar à soma dos dois semi-ângulos através da aplicação de uma regra habitualmente aplicada na resolução de equações (se se divide por dois todos os termos de um membro da equação, também se divide por dois o termo do outro membro da equação), sem compreender efectivamente a relação em causa. Ou seja, poderão, meramente, aplicar um procedimento algorítmico sem verdadeiramente raciocinarem dedutivamente.

Em suma, as funções de explicação e de comunicação encontram-se intimamente associadas. A função comunicativa acabou por constituir uma motivação para o Ricardo proceder à explicação da relação encontrada por si. Trata-se de um motivo social (Leont'ev, 1978) pois, genuinamente, o Ricardo estava interessado em partilhar, com os colegas de grupo, algo que ele descobrira e que nenhum dos outros ainda compreendera.

## A prática social

Nesta tarefa, no que respeita ao trabalho do grupo-alvo, a descoberta da solução do problema foi feita por intermédio de uma demonstração narrativa e informal, construída individualmente pelo Ricardo, de um modo súbito, por *insight*. Não existiu qualquer relação entre essa mesma concretização e as interacções sociais no seio do grupo. Todo o esforço posterior do Ricardo em partilhar a sua demonstração com os colegas do grupo embateu nas dificuldades de comunicação inerentes à prematuridade do momento em que ocorreu essa partilha, já que os colegas de grupo do Ricardo ainda não tinham percorrido o seu próprio processo de apropriação do sentido da tarefa. Assim, embora o Ricardo tenha sido o único detentor do significado original da demonstração, na sua fase de estágio, nunca o ocultou dos restantes elementos do grupo; pelo contrário, usou diversos recursos, incluindo o da particularização e o esboço de esquemas, para tornar transparente o seu processo individual de construção de raciocínio.

A construção posterior de uma demonstração algébrica, apesar de orientada pela professora, teve uma participação mais dominante por parte do Ricardo. Assim, apesar da sugestão inicial da professora, para que começassem pela elaboração do esquema, visar, em princípio, a apropriação da tarefa por todos os elementos do grupo, existiu em todas as fases da exploração da tarefa (após esta intervenção da professora) um protagonismo do Ricardo, já que este foi o primeiro a elaborar o esquema e também o primeiro a construir a demonstração algébrica, sem receber dos colegas contributos para esse efeito. Até na elaboração da resposta, apesar de escrita simultaneamente por todos os membros do grupo, foi sempre ditada oralmente pelo Ricardo. Assim, a Sara, a Maria e o Bernardo elaboraram individualmente os seus próprios esquemas mas sempre com o apoio do esquema já construído do Ricardo, necessitando, de vez em quando, de olhar para a ficha do Ricardo para irem aferindo da correcção dos seus esquemas. Para o registo da demonstração algébrica, os colegas de grupo do Ricardo copiaram a mesma pelo Ricardo, colocando mesmo a sua ficha no meio da mesa.

Os colegas do Ricardo passaram, pois, por um processo de ventriloquismo, apropriando-se, pouco a pouco da sua voz e, decorrentemente, do significado matemático da demonstração narrativa e da demonstração algébrica presentes no trabalho do grupo com esta tarefa. Quando a Sara afirmou ter percebido as palavras do Ricardo, ainda antes da elaboração do esquema, já estava a entrar um pouco no território do colega, fazendo suas as palavras daquele. Talvez por isso, quando acabou o esquema, a Sara já se sentisse capaz de dar uma resposta à questão: o esquema encerrava, em si, uma relação geral que lhe era compreensível e que ela pensava conseguir traduzir utilizando um modo narrativo.

O padrão de interacção do grupo também nesta tarefa se mantém: o Ricardo detentor de um poder superior ao dos colegas, logo seguido pela Sara, nessa hierarquia. A comunicação do Ricardo é dirigida essencialmente à Sara, sendo também um pouco dirigida ao Bernardo. O facto de ser a Sara a verbalizar a sua incompreensão das palavras do Ricardo constitui, de igual modo, um sinal evidenciador do grau elevado de participação da Sara no grupo. Tanto a Maria como o Bernardo, menos participativos, ao silenciarem a sua incompreensão, acabam por fazer uma caminhada de apropriação menor do que a manifestada pela Sara. No entanto, existe um momento em que a Maria assume um maior protagonismo do que o habitual. Quando o Ricardo tenta, pela segunda vez, comunicar a sua descoberta aos colegas, ambas as vozes, a da Maria e a do Ricardo, se complementam, revelando uma clara sintonia e uma actualização de significado matemático por parte da Maria: "M- Ângulos suplementares…; R- Cento e oitenta graus. Metade…; M- A bissectriz…; R- Dá noventa graus.".

Durante a exploração da tarefa, existiu em todos os elementos do grupo um crescimento de posse de significado matemático, embora em diferente grau. O Ricardo, apesar de manifestar uma compreensão por *insight*, percorre um caminho de aprofundamento dessa mesma compreensão, sempre que tenta explicitá-la aos colegas, tanto que é ele próprio que, inicialmente, afirma ter a certeza de que está bem mas que não percebe.

## A CONCLUIR

A comunicação, sendo um processo didáctico em que intervêm professor e alunos, consiste essencialmente numa troca e partilha de significados (Bishop e Goffree, 1986), inscrita necessariamente num processo de negociação, em que professor e alunos procuram atingir os respectivos objectivos. A negociação constitui uma condição necessária à aprendizagem de Matemática quando o conhecimento prévio dos alunos é diferente do conhecimento que o professor pretende que eles venham a ter. De acordo com Voigt (1994), o discurso na sala de aula é caracterizado, precisamente, por esta diferença, que constitui a norma e a essência da respectiva função dialógica, geradora constante de novos significados (Wertsch, 1991). No caso da demonstração, esta é um objecto de intervenção curricular, e por conseguinte, de negociação, já que não será expectável que os alunos enveredem por processos demonstrativos, de forma espontânea, dada a sua tendência a validar resultados com base em evidência empírica.

O professor detém um papel decisivo no processo da introdução da demonstração na aula de Matemática e da negociação da sua importância. É o professor que, na qualidade de mediador cognitivo e cultural, negociará, de uma forma progressiva, com os seus alunos, o estatuto de uma conjectura, a necessidade de procederem a uma demonstração, o estatuto da verificação empírica no que respeita à validação das afirmações matemáticas, e o significado de uma demonstração. É o professor que, através de um discurso questionador, baseado na procura dos porquês, incentivará os alunos a justificar, a explicar, a fundamentar as proposições matemáticas. Quando o professor negoceia com os alunos o campo de argumentos (Toulmin, 1969) próprio da matemática, está, efectivamente, a negociar na sua sala de aula, normas sociomatemáticas (Yackel e Cobb, 1996) específicas da aula de Matemática (Balacheff, 1991), assumindo um papel de representante de valores culturais próprios da matemática. Em particular, a prática de um professor se demitir de validar e legitimar as conclusões dos alunos quando estes ainda se encontram numa fase de exploração da tarefa, acaba por se prender com a norma sociomatemática do que consiste uma validação aceitável, levando a que os alunos procurem uma legitimação no interior do quadro teórico da matemática, e não uma legitimação baseada unicamente na autoridade do professor.

A certeza, sentida pelos alunos, proveniente da demonstração dedutiva evidencia que esta é, efectivamente, anti-autoritária (Hanna, 1996), na medida em que a validade da conclusão é estabelecida pela transparência da explicitação das regras de raciocínio da própria demonstração, e não por uma autoridade externa. Esta certeza advém da força conferida à conclusão pela garantia (Toulmin, 1969) justificativa usada que autoriza os alunos a aceitar necessariamente e sem equívoco essa mesma conclusão. Assim, a força conferida pela garantia varia em função do campo de argumentos, uma vez que a garantia inscreve-se nas normas de argumentação de um dado campo específico. Enquanto em matemática, a garantia leva a aceitar a conclusão na ordem do necessário, no campo de argumentos da vida quotidiana, a garantia poderá justificar a conclusão na ordem do provável ou do possível.

Os diferentes poderes de cada um dos elementos do grupo consubstanciam diferentes identidades (Wenger, 1998), influenciando o modo de os alunos se convencerem acerca da verdade das afirmações matemáticas. O grau de participação no trabalho é também associado ao poder e identidade de cada um. Assim, os alunos com maior poder no grupo são também os alunos que têm uma identidade de participação na prática do grupo. O envolvimento mútuo entre os diversos elementos do grupo cria relações caracterizadas por uma mistura de poder e de dependência. O equilíbrio de poderes não só permite a emergência da argumentação como também a explicitação verbal das ideias matemáticas. Por conseguinte, o diálogo, ocorrido no seio do grupo, toma especificidades individuais e simultaneamente sociais, consoante o poder social de cada um e a teia de interrelacionamentos desenvolvidos no grupo. Apesar de existir a tendência, no grupo-alvo, de as ideias do Ricardo serem adoptadas pelos restantes elementos, sem que seja necessário usar a persuasão através de palavras, o discurso do Ricardo é persuasivo, nunca tentando impor os seus pontos de vista. É um aluno que, habitualmente, argumenta, justifica, explica e fundamenta as suas afirmações.

A explicação, encetada no seio do grupo-alvo, principalmente pelo Ricardo, torna-se objecto de reflexão (Yackel e Cobb, 1996), uma vez que o aluno teve de atender à adequação da mesma para os colegas do grupo, de forma a ser entendida. O Ricardo opera uma mudança no seu pensamento, em que a explicação passa de processo (participar numa explicação) a objecto (reflectir sobre a explicação e agir em conformidade). Tal como apontado por Yackel e Cobb (1996), a explicação é um acto comunicativo que visa a clarificação de aspectos do pensamento matemático de um sujeito que podem não ser visíveis a outros. Segundo Kieran (2002), trata-se de um acto que pode ser difícil de pôr em prática, principalmente quando os alunos se envolvem em situações problemáticas novas. "Making one's emergent thinking available to one's partner in such a way that the interaction be highly mathematically productive for both may be more of a challenge to learners than is suggested by the current mathematics education research literature" (Kieran, 2002, p. 220). Tendo uma função inerentemente social, a explicação acaba por conduzir a uma maior clarificação conceptual do próprio sujeito. De facto, nesse processo de explicitação e de partilha, o Ricardo foi ampliando a sua compreensão matemática, e o modo integral como ele tomou posse do significado da demonstração é revelado pelo modo e grau com que usou e afirmou como seus os significados matemáticos negociados com os colegas.

E sendo a aprendizagem uma característica da prática, a aprendizagem da demonstração, em particular, é feita pelo grupo. Apesar de, na tarefa analisada neste artigo, a origem da demonstração se colocar a título individual, ela é depois assumida enquanto prática social do grupo. Quando a posse de significado é partilhada, existe um crescimento da mesma em todos os membros do grupo (Wenger, 1998).

## REFERÊNCIAS

Alibert, D., e Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Dordrecht: Kluwer .

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interactions: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen e J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 175-192). Dordrecht: Kluwer

Benson, D. (1999). *The moment of proof: Mathematical epiphanies*. New York: Oxford University Press.

Bishop, A., e Goffree, F. (1986). Classroom organisation and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Boavida, A. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Brendefur, J., e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Brown, A., e Dowling, P. (1998). *Doing research/reading research: A mode of interrogation for education*. London: The Falmer Press.

Carrilho, M. (1990). *Verdade, suspeita e argumentação*. Lisboa: Ed. Presença.

Chazan, D. (1993). High school geometry students'justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Cobb, P., Wood, T., e Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In E. A. Forman, N. Minick e C. A. Stone (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

De Villiers, M. (2004). The role and function of quasi-empirical methods in mathematics. *Canadian Journal of Science*, 397-418.

De Villiers, M. D. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática, 63*, 31-36.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3ª ed.). New York: Macmillan.

Fonseca, L. (2004). *Formação inicial de professores de Matemática: A demonstração em geometria* (tese de doutoramento, Universidade de Aveiro). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. In L. Puig e A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia: Universitat de Valencia.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 5-23.

Hanna, G., e Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 421-438.

Hanna, G., e Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Harel, G., e Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: Information Age Publishing Inc., e NCTM.

Healy, L., e Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, *31*(4), 396-428.

Herbst, P. G. (2002). Engaging students in proving: A double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176-203.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(4), 389-399.

Hersh, R. (1997). *What is mathematics, really?* Nova Iorque: Oxford University Press.

Kieran, C. (2002). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. In C. Kieran, E. Forman e A. Sfard (Eds.), *Learning Discourse: Discursive approaches to research in mathematics education* (pp. 187-228). Dordrecht: Kluwer

Lave, J. (1997). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.

Leont'ev, A. (1978). *Activity, consciousness and personality*. New Jersey: Prentice Hall.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-2): Proof in Dynamic Geometry Environments, 25-53.

Merriam, S. (1991). *Case study research in education: A qualitative approach* (2ª ed.). São Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Meyer; M. (1982). *Logique, langage et argumentation* (2ª ed.). Paris: Hachette.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Perelman, C. (1987). Argumentação. In *Enciclopédia Einaudi: Oral/Escrito Argumentação* (Vol. 11, pp. 234-265). Lisboa: Imprensa Nacional.

Recio, A., e Godino, J. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 83-99.

Rodrigues, M. (1997). *A aprendizagem da Matemática enquanto processo de construção de significado mediada pela utilização do computador* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: A.P.M.

Rodrigues, M. (2000). Interacções sociais na aprendizagem da Matemática. *Quadrante*, *9*(1), 3-47.

Rodrigues, M. (2008). *A demonstração na prática social da aula de Matemática*. Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa.

Simpson, A. (1995). Developing a proving attitude. In Institute of Education (Ed.), *Conference Proceedings: Justifying and Proving in School Mathematics* (pp. 39-46). London: University of London.

Thurston, W. P. (1995). On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *15*(1), 29-37.

Toulmin, S. (1969). *The Uses of Argument*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 275-298.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Hempstead: Harvester Wheatsheaf.

Yackel, E., e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*, 458-477